

## Beispiel für eine schriftliche Prüfung

Arbeitszeit: 180 Minuten

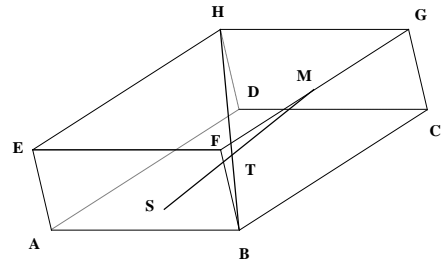
Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht grafikfähig) und Formelsammlung

Von den vier Aufgaben sollen Sie **drei** auswählen und vollständig bearbeiten.

Erläutern Sie bei allen Aufgaben Ihren Lösungsweg !

Bei Verwendung des Taschenrechners müssen die Ergebnisse auf zwei Stellen hinter dem Komma gerundet werden.

- 1.1 Durch die Basisvektoren  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$  und  $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$  wird ein Spat aufgespannt. Vom Mittelpunkt der Kante  $\overline{FG}$  wird durch einen Punkt  $T$  der Raumdiagonalen  $\overline{BH}$  eine Gerade gezogen. Diese Gerade schneidet die Grundfläche in  $S$ , so daß  $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{5}\vec{a} + m\vec{b}$  ist.



- 1.1.1 Drücken Sie  $\overrightarrow{BH}$  und  $\overrightarrow{MS}$  durch die Basisvektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus !
- 1.1.2 In welchem Verhältnis werden die Strecken  $\overline{BH}$  und  $\overline{MS}$  durch den Punkt  $T$  unterteilt ? Bestimmen Sie auch  $m$  !
- 1.2 Die Punkte  $A(1 | 1 | -2)$ ,  $B(4 | 3 | -6)$  und  $C(4 | 1 | 2)$  bilden ein Dreieck. Liegt der Punkt  $P(1,75 | 2 | -5)$  innerhalb des Dreiecks  $ABC$  ? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch !
- 2.1 Das Polynom  $p$  zweiten Grades besitzt im Punkt  $E(-\frac{3}{2} | \frac{13}{8})$  ein Extremum. Außerdem liegt der Punkt  $A(-\frac{1}{2} | \frac{9}{8})$  auf dem Graphen von  $p$ . Zeigen Sie, daß  $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$  gilt ! Bestimmen Sie dann die Gleichungen der Tangenten an die Funktion  $p$ , die durch den Punkt  $Q(-1 | \frac{7}{2})$  gehen.
- Achtung:** Der Punkt  $Q$  liegt **nicht** auf dem Graphen der Funktion  $p$  !
- 2.2 Untersuchen Sie die Funktion  $w(x) = 2 \ln[(x^2 + 1)^{-1}] - 3$  auf Symmetrie und Krümmungsverhalten ! Ist  $w$  umkehrbar ? Begründen Sie Ihre Antwort ! Zeigen Sie, daß  $w$  **keine** Nullstelle besitzt !

# Mathematik T

3.1  $u(x) = \frac{1}{2}x - x^2 - \frac{1}{2} \cdot |3x - 2x^2 + 2| + \frac{5}{2}$

Definieren Sie die Funktion  $u$  abschnittsweise, d.h. lösen Sie das Betragszeichen auf! Bestimmen Sie die Ableitungen  $u'$ ,  $u''$  und  $u'''$ ! Geben Sie von  $u'$ ,  $u''$  und  $u'''$  jeweils die Definitionsmenge an! Begründen Sie Ihre Antwort! Zeichnen Sie dann die Graphen der Funktionen  $u$ ,  $u'$  und  $u''$ !

3.2 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion  $v(x) = 5e^{-x} \cdot \sin\left(\frac{3}{4}\pi - x\right)$ !

Zeigen Sie, daß der Punkt  $P(\pi | y_P)$  ein Extrempunkt der Funktion  $v$  ist!

Ist  $P$  ein Maximum oder ein Minimum von  $v$ ?

4. Gegeben sind die Punkte  $A(-4 | 2 | -1)$ ,  $B(6 | -4 | 1)$ ,  $C(-5 | 3 | -2)$ ,  $D(1 | 3 | 0)$ , die Gerade  $g$  und die Ebene  $E_2$ :

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}$$

$$E_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda, \nu \in \mathbb{R}.$$

4.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $E_1$ , die durch die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  festgelegt wird!

4.2 Wie liegen die Gerade  $g$  und die Ebene  $E_1$  zueinander? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt!

4.3 Berechnen Sie den Abstand des Punktes  $D$  von der Ebene  $E_1$ !

4.4 Wie liegen die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  zueinander. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade und den Schnittwinkel  $\alpha$ .

4.5 Zeichnen Sie die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  und die Gerade  $g$  in ein kartesisches Koordinatensystem ein!

Die Aufgaben beim Kurstyp M und die Aufgaben 1, 2, 4.1 und 4.2. beim Kurstyp W können als weitere Beispiele zum Bereich Analysis herangezogen werden.