Studienkolleg bei den Universitäten des Freistaates Bayern

Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf den

Mathematiktest

1. Polynomdivision:

1.1 Dividieren Sie!

a) $(5x^3 - 16x^2 + 58x - 11):(x^2 - 3x + 11) =$ Lös.: $= 5x - 1$

b) $(42x^9 - 13x^7 - 104x^5 + 84x^3 + 9x):(6x^4 + 11x^2 + 1) =$ Lös.: $= 7x^5 - 15x^3 + 9x$

c) $(x^4 - 1):(x+1) =$ Lös.: $= x^3 - x^2 + x - 1$

d) $(18x + 9 - 32x^{-1} + 5x^{-2}):(3x^{-1} - 0{,}5x^{-2}) =$ Lös.: $= 6x^2 + 4x - 10$

e) $(x^4 - x^{-1}):(1 + x^{-1}) =$ Lös.: $= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}$

f) $(x^6 + x^5y - xy^5 - y^6):(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) =$ Lös.: $= x^2 - y^2$

g) $(a^3b + 2a^2b^2 + ab^3):(a+b) =$ Lös.: $= a^2b + ab^2$

h) $(6a^4 - 3a^3b^2 - 4ab + 2b^3):(2a - b^2) =$ Lös.: $= 3a^3 - 2b$

1.2 Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen:

a) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ Lös.:-1; 2; 2

b) $x^3 - 6x^2 + 32 = 0$ -2: 4; 4

c) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ -2; -2; 1

d) $x^3 - 27x - 54 = 0$ -3; -3; 6

e) $x^3 - 7x + 6 = 0$ -3; 1; 2

f) $x^3 - 13x + 12 = 0$ -4; 1; 3

g) $x^3 - \frac{19}{36}x + \frac{5}{36} = 0$ $-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}$

h) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ -1; 1; 1

i) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ -1; 1; 2

j) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ -2; 1; 4

k) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ -2; 2; 3

l) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$ -3; 3; 4

m) $x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$ $5; +\sqrt{2}; -\sqrt{2}$

n) $x^3 - x^2 - 5x + 2 = 0$ $-2; 1{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{5}$

o) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 46x + 120 = 0$ -3; -2; 4; 5

p) $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$ -4; -1; 2; 3

q) $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3 = 0$ -3; -1; -1; +1

2. <u>Bruchterme</u>:

2.1 Fassen Sie zusammen!

$$\frac{1}{a-b} - \frac{ab}{a^3 - b^3} =$$ Lös.: $= \frac{a^2+b^2}{a^3-b^3}$

2.2 Vereinfachen Sie soweit wie möglich!

a) $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3)} =$ Lös.: $= \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{a^4b^3x^2y - u^2v^5x^2y + a^4b^3xy^2 - u^2v^5xy^2}{u^2v^5xy - a^4b^3xy - u^2v^5x^2y^2 + a^4b^3x^2y^2} =$ Lös.: $= \frac{x+y}{xy-1}$

c) $\frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^{n-3}} - \frac{82}{2^{n+1}} =$ Lös.: $= \frac{3}{8}$

d) $\frac{1-x^2}{x^8} + \frac{1+x}{x^6} - \frac{1}{x^5} =$ Lös.: $= \frac{1}{x^8}$

e) $\frac{x^m + x^n}{x^m - x^n} + \frac{x^m - x^n}{x^m + x^n} - \frac{x^{2m} + x^{2n}}{x^{2m} - x^{2n}} =$ Lös.: $= \frac{x^{2m}+x^{2n}}{x^{2m}-x^{2n}}$

3. <u>Quadratische Gleichungen</u>:

3.1 a) $x^2 - 8x + 16 = 0$; $IL = \{4\}$ b) $x^2 + 7x = 0$; $IL = \{0; -7\}$

c) $x^2 - 5x + 6 = 0$; $IL = \{2; 3\}$ d) $x^2 + 6x - 3 = 0$; $IL = \{-3 \pm 2\sqrt{3}\}$

e) $3x^2 + x - 2 = 0$; $IL = \left\{\frac{2}{3}; -1\right\}$ f) $6x^2 - 5x - 6 = 0$; $IL = \left\{1{,}5; -\frac{2}{3}\right\}$

g) $5x^2 + 2x + 1 = 0$; $IL = \{\ \}$ h) $3x^2 - 10x + 6 = 0$ $IL = \left\{\frac{5}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7}\right\}$

i) $x^2 - 9x - 22 = 0$; $IL = \{11; -2\}$ j) $x^2 + x - 1 = 0$; $IL = \{-0{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{5}\}$

3.2 Gleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen:

a) $3x^2 + \frac{8}{x^2} = 14$ $\quad IL = \left\{\pm 2; \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$

b) $x^4 + x^2 - 1 = 0$; $IL = \left\{\pm\sqrt{-0{,}5 + 0{,}5\sqrt{5}}\right\}$

c) $16x^4 - 136x^2 + 225 = 0$; $\quad IL = \left\{\pm\frac{5}{2}; \pm\frac{3}{2}\right\}$

d) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$; $\quad IL = \{2; -1\}$

e) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$; $\quad IL = \left\{\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{5}\right\}$

f) $x - 8\sqrt{x} + 15 = 0$; $\quad IL = \{9; 25\}$

g) $x - 6\sqrt{x} + 4 = 0$; $\quad IL = \left\{14 \pm 6\sqrt{5}\right\}$

h) $x + 2\sqrt{x} - 24 = 0$; $\quad IL = \{16\}$

i) $(3x^2 - 7)\cdot(2x^2 - 5) = x^2 - 1$; $\quad IL = \left\{\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{3}\right\}$

4. <u>Wurzelgleichungen</u>:

a) $\sqrt{x+7} + 1 = 2x$; $\quad IL = \{2\}$

b) $2 - x = \sqrt{4 - 3x}$; $\quad IL = \{0; 1\}$

c) $x + 2\sqrt{3x+1} = 7 - 2x$; $\quad IL = \{1\}$

d) $\sqrt{x+8} + \frac{12}{\sqrt{x+8}} = 7$; $\quad IL = \{1; 8\}$

e) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+3} = \sqrt{5x+6}$; $\quad IL = \{6\}$

f) $\sqrt{x-6} + \sqrt{1-x} = \sqrt{2x-5}$; $\quad IL = \{\ \}$

g) $(x^{-2,5} - 7)^{-0,5} = 0{,}2$; $\quad IL = \{0{,}25\}$

h) $(2 - x^2)^{0,5} = (2 - x^2)^{\frac{1}{3}}$; $\quad IL = \left\{\pm 1; \pm\sqrt{2}\right\}$

i) $\left(x^{\frac{2}{5}} + 4\right)^{\frac{4}{3}} = 16$; $\quad IL = \{32\}$

j) $\sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7$; $\quad IL = \{4; 11\}$

\- k) $(x-2)\sqrt{x^2 - 9} = 0$; $\quad IL = \{\pm 3\}$

l) $\sqrt{4-x} + \sqrt{1+x} = 3$; $\quad IL = \{0; 3\}$

\-

\- m) $\sqrt{x^2 - 5} \;=\; x - 5$; $\quad IL = \{\ \}$

n) $(x^{\frac{3}{2}} + 24)^{\frac{2}{5}} = 4$; $\quad IL = \{4\}$

o) $(x+6)^{0,75} = 8$; $\quad IL = \{10\}$

5. <u>Ungleichungen</u>:

a) $-x^2 < 4x$; $\quad IL = \left]-\infty; -4\right[\cup \left]0; +\infty\right[$

b) $x - 6\sqrt{x} + 8 > 0$ $\quad IL = \left[0; 4\right[\cup \left]16; +\infty\right[$

c) $2 < \frac{x+1}{x-1} < 3$; $\quad IL = \left]2; 3\right[$

d) $(x-5)^2 \leq 4$; $\quad IL = \{x \mid 3 \leq x \leq 7\}$

e) $x - 4\sqrt{x} \geq -3$; $\quad IL = [0;1] \cup \left[9; +\infty\right[$

f) $2x - 3\sqrt{x} < 2$ $\quad IL = \left[0; 4\right[$

g) $\dfrac{x+2}{x-1} < 2$; $\quad IL = \left]-\infty\,;1\right[\cup \left]4;+\infty\right[$

h) $(x+3)(x-4) \geq 0$; $\quad IL = \left]-\infty;-3\right] \cup \left[4;+\infty\right[$

i) $(2x-3)(5x-8) \leq 0$; $\quad IL = \left[1{,}5;\, 1{,}6\right]$

j) $x^2 + 6x - 27 > 0 \quad IL = \left]-\infty;-9\right[\cup \left]3;+\infty\right[$

k) $x(x-3) > 0$; $\quad IL = \left]-\infty;0\right[\cup \left]3;+\infty\right[$

l) $x^2 - x < 6$; $\quad IL = \left]-2;\, 3\right[$

m) $(x-3)^2 > 1$; $\quad IL = \left]-\infty;2\right[\cup \left]4;+\infty\right[$

n) $\dfrac{x+1}{|x-2|} > 2$; $\quad IL = \left]1;\, 2\right[\cup \left]2;\, 5\right[$

o) Zeichnen Sie die Bereiche aller Punkte (x; y) in IR×IR , für die gilt:

o1) $x \leq |y|$ $\qquad$ o2) $|x+y| \geq 1$

6. <u>Gleichungssysteme</u>:

a) $\begin{aligned} x + 4y &= 4 \\ 7x + 6y &= -5 \end{aligned} \qquad IL = \left\{\left(-2;\, \dfrac{3}{2}\right)\right\}$

b) $\begin{aligned} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y &= 1 \\ \frac{2}{5}x - \frac{1}{4}y &= 1 \end{aligned} \qquad IL = \{(10;\, 12)\}$

c) $\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{8}{65} &= 0 \\ \frac{5}{x} + \frac{13}{y} + 2 &= 0 \end{aligned} \qquad IL = \{(-5;\, -13)\}$

d) $\begin{aligned} \frac{a}{x+y} - \frac{b}{x-y} &= 1 \\ \frac{b}{x+y} + \frac{a}{x-y} &= \frac{b^2 - a^2}{2ab} \end{aligned} \qquad IL = \{(a-b;\, a+b)\}$

e) $\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{y}} &= 3 \\ \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} &= 1 \end{aligned}$ $\qquad$ keine reelle Lösung!

f) $\begin{aligned} x^4 - y^4 &= 16 \\ x^2 - y^2 &= 4 \end{aligned} \qquad IL = \{(2;0); (-2;0)\}$

g) $\begin{aligned} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} - 7 &= 0 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + 1 &= 0 \end{aligned} \qquad IL = \{(1;\, -1)\}$

h) $\begin{aligned} y - 10xy + 2x &= 0 \\ 4y - 20xy + 3x &= 0 \end{aligned} \qquad IL = \left\{(0;0); \left(\dfrac{1}{2};\, \dfrac{1}{4}\right)\right\}$

7. Exponentialgleichungen:

a) $2^x = 8$; $IL = \{3\}$ b) $2^x = 64$; $IL = \{6\}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$; $IL = \{-3\}$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 16$; $IL = \{-2\}$

e) $5^x = 5^3$; $IL = \{3\}$ f) $3^{x+5} - 3^3 = 0$; $IL = \{-2\}$

g) $\left(5^{3x-1}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(5^{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $IL = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ h) $0{,}1^x = 100$; $IL = \{-2\}$

i) $2^x = 0{,}125$; $IL = \{-3\}$ j) $11^x - 1 = 0$; $IL = \{0\}$

k) $4^x - 8 = 0$; $IL = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ l) $5^{5x+1} = 25^{2x-3}$; $IL = \{-7\}$

m) $2^x - 2^{x-2} = 3$; $IL = \{2\}$ n) $3^{6x-7} + 9^{3x-4} + 27^{2x-4} = 325$; $IL = \{2\}$

o) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$; $IL = \{1; 2\}$ p) $10^{2x+1} + 99 \cdot 10^x = 10$; $IL = \{-1\}$

q) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$; $IL = \{2; 3\}$ r) $2^{3x-1} + 2^{2x} - 2^{x+2} = 0$; $IL = \{1\}$

s) $2^x = 3 + 2^{2-x}$; $IL = \{2\}$ t) $2^{x+1} - 2^{x-1} + 4 \cdot 2^{1-x} = 8$; $IL = \{2 ; \log_2 \frac{4}{3}\}$

u) $9^x - 2 \cdot 3^x - 63 = 0$; $IL = \{2\}$ v) $3 \cdot 100^x - 10^{x+1} = \frac{1}{5} \cdot 10^3$; $IL = \{1\}$

8. Logarithmusgleichungen und Exponentialgleichungen:

8.1 Formeln für Logarithmen:

$$\boxed{b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b y}$$

$(y \in IR^+ \text{ und } b \in IR^+ \text{ohne } \{1\})$

z. B. $0{,}5^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{0,5} 3 = \frac{\lg 3}{\lg 0{,}5}$

Der dekadische Logarithmus: $\log_{10} a =: \lg a$; $\lg 1 = 0$; $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$;

Der natürliche Logarithmus: $\log_e x =: \ln x$; $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$;
(e = 2,71828... heißt Eulersche Zahl)

Rechengesetze für Logarithmen ($u, v > 0$)

$\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$ $\qquad$ $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$

$\log_b u^n = n \cdot \log_b u$, $\qquad$ $\log_b 1 = 0$

$\log_b b^n = n$ $\qquad$ $b^{\log_b n} = n$

$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$ die Basisumrechnungsformel $\qquad$ $(a > 0 \; und \; b, c \in IR \; ohne \; \{1\})$

8.2 Aufgaben:

8.2.1 Berechnen Sie x !

a) $\lg 0{,}1 = x$ $\quad IL = \{-1\}$ $\qquad$ b) $\log_{0,25} 4 = x$ $\quad IL = \{-1\}$ $\qquad$ c) $\log_{0,5} 8 = x$ $\quad IL = \{-3\}$

d) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = x$ $\quad IL = \{-4\}$ $\qquad$ e) $\log_4 4^2 = x$ $\quad IL = \{2\}$ $\qquad$ f) $2^{\log_2 3} = x$ $\quad IL = \{3\}$

g) $\log_2 0{,}5 = x$ $\quad IL = \{-1\}$ $\qquad$ h) $\log_2 1 = x$ $\quad IL = \{0\}$ $\qquad$ i) $\log_2 4 = x$ $\quad IL = \{2\}$

j) $\log_{0,5} 2 = x$ $\quad IL = \{-1\}$ $\qquad$ k) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = x$ $\quad IL = \{-2\}$ $\qquad$ l) $\log_6 \sqrt{6} = x$ $\quad IL = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

m) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$ $\quad IL = \{-3\}$ $\qquad$ n) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = x$ $\quad IL = \{-1\}$ $\qquad$ o) $\log_5 125^{-1} = x$ $\quad IL = \{-3\}$

p) $\log_{12} 144 = x$ $\quad IL = \{2\}$ $\qquad$ q) $\log_{0,5} 0{,}125 = x$ $\quad IL = \{3\}$ $\qquad$ r) $\log_2 32 = x$ $\quad IL = \{5\}$

s) $\lg 10000 = x$ $\quad IL = \{4\}$ $\qquad$ t) $\log_5 \sqrt{5^3} = x$ $\quad IL = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ $\qquad$ u) $\log_2 4\sqrt{2} = x$ $\quad IL = \{2{,}5\}$

v) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = x$ $\quad IL = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ $\qquad$ w) $\log_{0,25} \frac{1}{2} = x$ $\quad IL = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ $\qquad$ x) $\log_{0,5} 0{,}25 = x$ $\quad IL = \{2\}$

y) $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}} = x$ $\quad IL = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ $\qquad$ z) $\log_{\frac{1}{a}} a^{\frac{3}{4}} = x$ $\quad IL = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

8.2.2 Für welche Werte von x gilt?

a) $\log_{\sqrt{a}} a^{-1,5} = x \quad IL = \{-3\}$

b) $\log_{a^2} \frac{1}{\sqrt{a}} = x \quad IL = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

c) $\log_x 0{,}25 = 2 \quad \mathrm{IL} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

d) $\log_x 8 = -3 \quad IL = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

e) $\log_x 3 = 0 \quad IL = \{\ \}$

f) $\log_2 x = 4 \quad IL = \{16\}$

g) $\log_2 x = 1 \quad IL = \{2\}$

8.2.3 Zerlegen Sie!

a) $\log_a (uvw) =$ Lös.: $= \log_a u + \log_a v + \log_a w$

b) $\log_a \frac{e \cdot f}{g \cdot h} =$ Lös.: $= \log_a e + \log_a f - \log_a g - \log_a h$

c) $\log_a u^{-5} =$ Lös.: $= -5 \log_a u$

d) $\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{b}} =$ Lös.: $= -\frac{1}{3} \log_a b$

e) $\log_a \left(x^2 - y^2\right) =$ Lös.: $= \log_a (x-y) + \log_a (x+y)$

8.2.4 Fassen Sie zusammen!

a) $\log_a x + \log_a y - \log_a z =$ Lös.: $= \log_a \frac{x \cdot y}{z}$

b) $-\log_a x - \log_a y =$ Lös.: $= \log_a \frac{1}{x \cdot y}$

c) $3\left(\log_a 3 - 2\log_a x - \frac{1}{2}\log_a y\right) =$ Lös.: $= \log_a \left(\frac{3}{x^2 \cdot \sqrt{y}}\right)^3$

d) $m \cdot \log_a (x+y) - n \cdot (\log_a x + \log_a y) =$ Lös.: $= \log_a \frac{(x+y)^m}{(x \cdot y)^n}$

8.2.5 Bestimmen Sie die Definitionsmenge ID und die Lösungsmenge IL !

a) $\lg(3x-2)=-1$; $ID=\left\{x \mid x\in IR \wedge x>\frac{2}{3}\right\}$ $IL=\{0{,}7\}$

b) $\lg(4x)+\lg\left(\frac{x}{5}\right)=1+\lg 2$; $ID=IR^{+}$ $IL=\{5\}$

c) $\log_2(x+2)+\log_2 x-\log_2 3=0$; $ID=IR^{+}$ $IL=\{1\}$

d) $\log(3x-5)=\lg(2x+6)$; $ID=\left\{x \mid x\in IR \wedge x>\frac{5}{3}\right\}$ $IL=\{11\}$

e) $(\lg x)^2-\lg x=0{,}75$; $ID=IR^{+}$ $IL=\{10^{1,5};10^{-0,5}\}$

f) $x^{\lg x}=1000$; $ID=IR^{+}$ $IL=\{10^{\pm\sqrt{3}}\}$

g) $(100x)^{\lg x}=1000$; $ID=IR^{+}$ $IL=\{10^{-3};10\}$

h) $2^x>100000$; $ID=IR$ $IL=\left\{x \mid x\in IR \wedge x>\frac{5}{\lg 2}\right\}$

i) $15\cdot 10^{x-2}=4^x\cdot 7$; $ID=IR$ $IL=\left\{\frac{\lg\frac{140}{3}}{\lg 2{,}5}\right\}$

j) $10^{x-1}=8\cdot 3^x$; $ID=IR$ $IL=\left\{\frac{\lg 80}{\lg\frac{10}{3}}\right\}$

k) $11^{x-1}=10$; $ID=IR$ $IL=\left\{\frac{\lg 110}{\lg 11}\right\}$

8.2.6 Bestimmen Sie die Lösungsmenge *IL* !

a) $\sqrt{x^4+x^4\cdot\lg x^2}=0$; $IL=\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$

b) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=1$; $IL=\left\{\frac{e-\frac{1}{e}}{2}\right\}$

c) $x\cdot x^{2+\lg x}=10000$; $IL=\{10^{-4};10\}$

d) $\begin{array}{l} y \cdot \lg x = x \\ y^2 - y = 0 \end{array}$ $IL = \{\quad\}$

e) $\log_{\frac{1}{a}} a\sqrt{a} = x$; $IL = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

f) $\log_{25} 0{,}008 = x$; $IL = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

g) $\log_b 4 - \log_b(3x) + 2 \cdot \log_b x = 0$; $IL = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

h) $\log_x \frac{1}{128} = -7$; $IL = \{2\}$

i) $\log_{\frac{1}{5}} 25^x = -2$; $IL = \{1\}$

j) $\log_8 2 = x$; $IL = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

k) $\log_x \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$; $IL = \{27\}$

l) $\log_2 \frac{1}{2} = x$; $IL = \{-1\}$

m) $\log_5 x = 4$; $IL = \{625\}$

n) $(10x)^{\lg x} = 100$; $IL = \{10;\ 0{,}01\}$

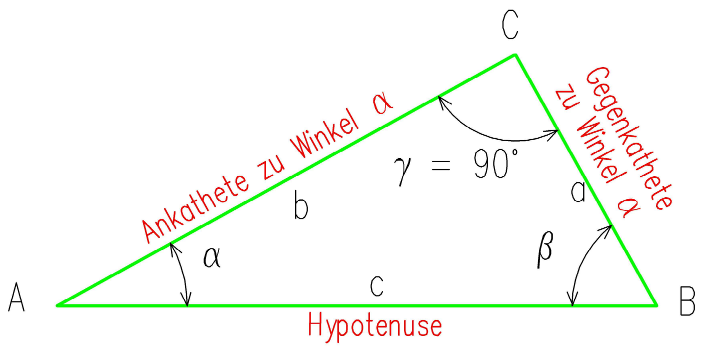
o) $\log_{a^2} \frac{1}{a^3} = x$; $IL = \{-1{,}5\}$

p) $\log_2\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right) = \log_2 x + \log_2 2$; $IL = \{1\}$

8.2.7 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f_a : x \mapsto f_a(x) = -\ln\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0$

sowie den Graphen der Umkehrfunktion f_a^{-1}!

9. <u>Trigonometrie</u>:



$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{Ankathete}{Gegenkathete} = \frac{b}{a}$$

Funktionswerte besonderer Winkel, Vorzeichen

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	I	II	III	IV
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	+	+	-	-
cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	+	-	-	+
tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.	0	nicht def.	+	-	+	-
cot α	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	nicht def.	0	+	-	+	-

Additionstheoreme:

$$\sin(x+y) = \sin x \ \cos y + \sin y \ \cos x$$
$$\sin(x-y) = \sin x \ \cos y - \sin y \ \cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x \ \cos y - \sin x \ \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \ \cos y + \sin x \ \sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \ \tan y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \ \tan y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}$$

Doppelwinkelfunktionen:

$$\sin(2x) = 2\sin x\ \cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2}{\cot x - \tan x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right)$$

$$\tan^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$$

Summen zweier trigonometrischer Funktionen (Identitäten):

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Das Bogenmaß:

$$x = \frac{\alpha\cdot\pi}{180°}$$

Aufgaben:

Für welche x mit $0° \le x < 360°$ $\left(bzw.\ 0 \le x < 2\pi\right)$ gilt?

a) $\sin x = \sin 2x$ $\quad x \in \{0°; 60°; 180°; 300°\}$

b) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ $\quad x \in \{30°; 150°\}$

c) $\sin x + \cos x = 1;$ $\quad x \in \{0°; 90°\}$

d) $\cos(x-45°) + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0;$ $\quad x \in \{195°; 255°\}$

e) $\sin x + \cos x = 0;$ $x \in \{135°; 315°\}$

f) $\sin x - \cos x = 0;$ $\quad x \in \{45°; 225°\}$

g) $\sin^2 x + \cos x = 1$; $x \in \{0°;\ 90°;\ 270°\}$

h) $\sin x + \cos(2x) = 1$; $x \in \{0°;\ 30°;\ 150°;\ 180°\}$

i) $\sin(2x) + 2\cos^2 x = 2$; $x \in \{0°;\ 45°;\ 180°;\ 255°\}$

j) $\sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$; $x \in \{120°;\ 150°;\ 300°;\ 330°\}$

k) $1 + \cos(2x) = \cos x$; $x \in \{60°;\ 90°;\ 270°;\ 300°\}$

l) $4\cos^2 x - 3 = 0$; $x \in \{30°;\ 150°;\ 210°;\ 330°\}$

m) $\sin^2 x + \cos x = 1{,}25$; $x \in \{60°;\ 300°\}$

n) $\sin^2 x = 3\cos^2 x \quad \wedge x \in IR$; $x \in \left\{\pm\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \wedge k \in Z\right\}$

o) $\begin{array}{c} x + y = \frac{2}{3}\pi \\ \sin x + \sin y = 1{,}5 \end{array}$ $x \in \left\{\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right\}$

p) $\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$; $x \in IR$

q) $\sin x \cdot \tan x = 1 + \cos x$; $x \in \left\{\frac{\pi}{3};\ \frac{2}{3}\pi;\ \pi\right\}$

r) $\sin(2x) + 2 \cdot \cos x = 0$; $x \in \left\{\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi\right\}$

s) $(1 + \sin x) \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$; $x \in \left\{0;\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi\right\}$

t) $4 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \tan^2 x = 2$; $x \in \{30°;\ 150°;\ 210°;\ 330°\}$

u) $\sin^2 x + 2 \cdot \tan^2 x = 2{,}5$; $x \in \left\{\frac{\pi}{4};\ \frac{3}{4}\pi;\ \frac{5}{4}\pi;\ \frac{7}{4}\pi\right\}$

v) $\tan(2x) = 3 \cdot \tan x$; $x \in \{0°;\ 30°;\ 150°;\ 180°;\ 210°;\ 330°\}$

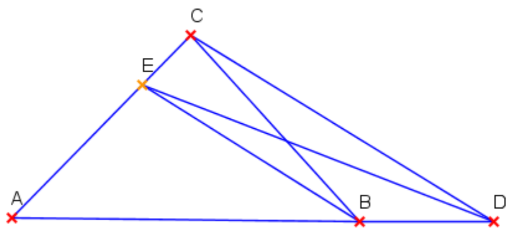
w) $\sin x + \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$; $x \in \{0°;\ 90°\}$

x) $\sin x \cdot \cos x = 1$; $x \in \{\ \}$

y) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f: x \mapsto y = 1 + 2 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x \in IR$.

10 Aufgaben zur Geometrie:

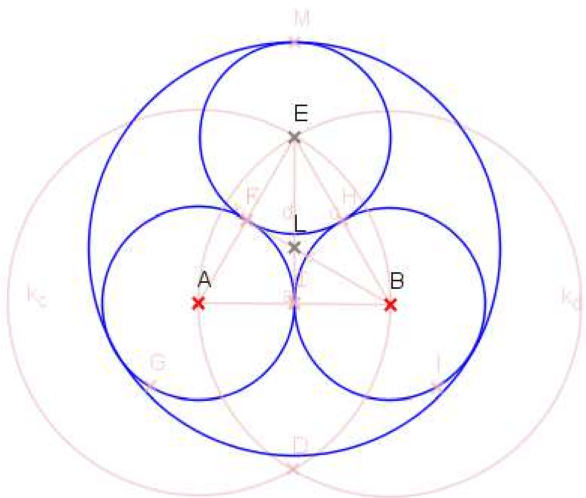
10.1. Beweisen Sie, dass die Flächeninhalte der Dreiecke $\Delta\, ABC$ und $\Delta\, ADE$ gleich sind.



Die Strecken $[EB]$ und $[CD]$ sind parallel.

Beweis: Der Schnittpunkt der Strecken $[DE]$ und $[BC]$ werde mit S bezeichnet. Die beiden Dreiecke haben das Viereck $ABSE$ gemeinsam. Es bleibt noch zu zeigen: $\Delta\, BDS$ ist flächengleich zu $\Delta\, ESC$. Nun gilt: $\Delta\, BDC$ ist flächengleich zu $\Delta\, EDC$, weil diese beiden Dreiecke die Seite $\overline{CD}$ gemeinsam haben und die Höhe in beiden Dreiecken gleich ist ($[EB]$ ist parallel zu $[CD]$).
$\Rightarrow$ $\Delta\, ESC$ ist flächengleich zu $\Delta\, BDS$ $\Rightarrow$ die Behauptung.

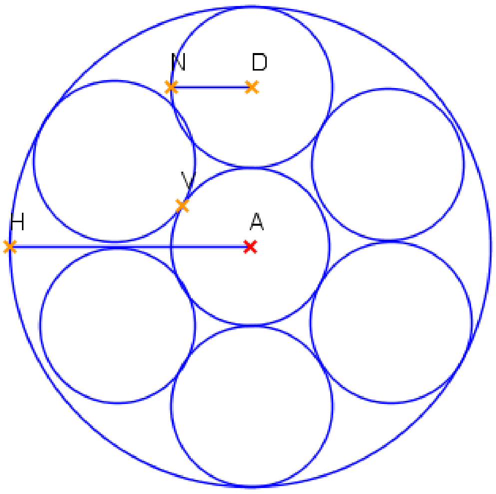
10.2 Einem Kreis mit dem Mittelpunkt L und dem Radius R= 10 cm sind drei kleinere Kreise mit den Radien r einbeschrieben. Berechnen Sie den Radius r der kleineren Kreise.



Lösung: R = 10 cm = 2r +x (x ist der Abstand vom kleinen Kreis zum Mittelpunkt L des großen Kreises). $\Rightarrow x = 10 - 2r$.
Nach dem Strahlensatz gilt: $(x+r) : R = 2r : 10\sqrt{3}$ (Seitenlänge s im gleichschenkeligen Dreieck bei gegebenem Umkreisradius R=10, $\frac{1}{2}s = R \cdot \cos 30° = R \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow s = 10\sqrt{3}$).

Ausrechnen liefert den Wert $r = \dfrac{100\sqrt{3}}{20+10\sqrt{3}} \approx 4{,}64$ [cm] (mit dem Taschenrechner).

10.3 Einem Kreis mit Radius $R = \overline{AH}$ sind 7 Kreise mit gleichem Radius $r = \overline{DN}$ so einbeschrieben, dass sich die Kreise berühren. Welcher Teil der Fläche des großen Kreises wird von den 7 kleinen Kreisen bedeckt?



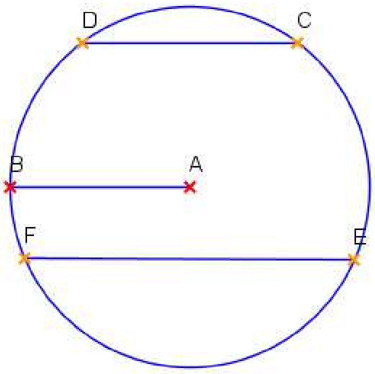
Lösung: Es gilt $r = (R-r) \cdot \sin 30° = (R-r) \cdot 0{,}5 = 0{,}5\,R - 0{,}5\,r \;\Leftrightarrow 3r = R$

Fläche des großen Kreises: $F_R = R^2\pi = 9r^2\pi$

Fläche der 7 kleinen Kreise: $7\,F_r = 7r^2\pi$

$\frac{7r^2\pi}{9r^2\pi} = \frac{7}{9}$ Antwort: $\frac{7}{9}$ der Fläche des großen Kreises werden durch die 7 kleinen Kreise bedeckt.

10.4 Es soll der Abstand zweier paralleler Sehnen in einem Kreis mit Radius $r = \overline{AB} = 65$ cm berechnet werden. Die Sehnenlängen sind $s_1 = \overline{CD} = 112$ cm und $s_2 = \overline{EF} = 126$ cm.

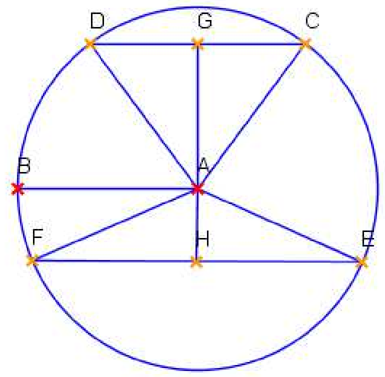


Lösung: $\overline{AG} = x_1$; $\overline{AH} = x_2$;

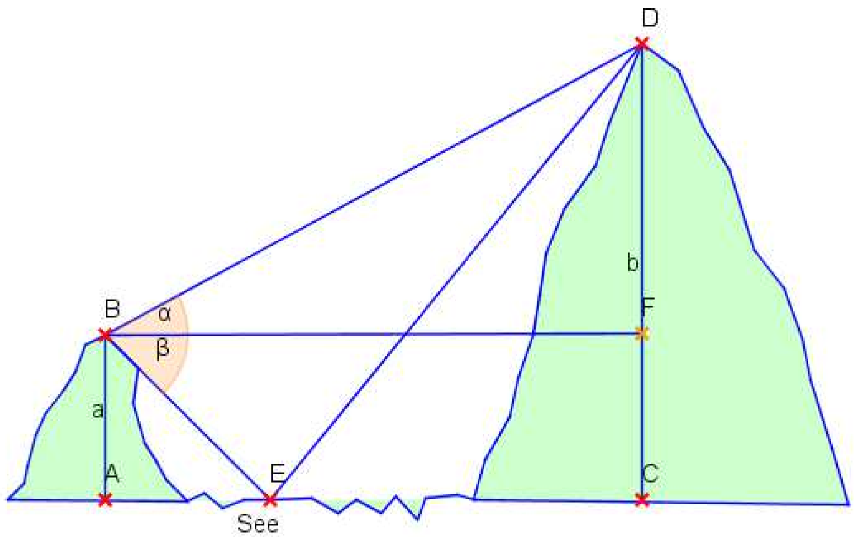
nach dem Satz des Pythagoras gilt im $\Delta\ AGD$: ${x_1}^2 + 56^2 = 65^2$

und im $\Delta\ AFH$: ${x_2}^2 + 63^2 = 65^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 33$ und $\Rightarrow \quad x_2 = 16$

Der Abstand beträgt 49 cm.



10.5 Von einem Punkt *B* eines Berges sieht man den Gipfel *D* eines zweiten Berges unter dem Winkel α. Der Punkt *B* liegt $a = \overline{AB}$ Meter über dem See. Das Spiegelbild *E* des Gipfels im See sieht man von *B* unter dem Winkel β.
Gesucht ist die Höhe b $= \overline{CD}$ des zweiten Berges in Abhängigkeit von a, α und β.

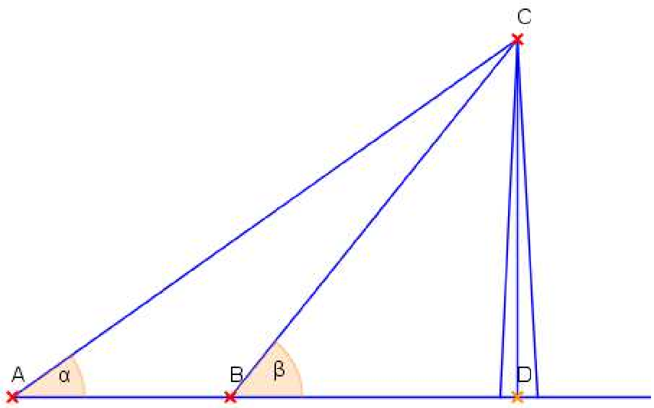


Lösung: (1) $\sin\beta = \dfrac{a}{\overline{BE}} \quad \Rightarrow \quad \overline{BE} = \dfrac{a}{\sin\beta}$

(2) Nach dem Sinussatz gilt: $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{ED}} = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \overline{ED} = \overline{BE}\cdot\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$

(3) $b = \overline{CD} = \overline{ED}\cdot\sin\beta = \overline{BE}\cdot\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}\cdot\sin\beta = \dfrac{a}{\sin\beta}\cdot\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}\cdot\sin\beta = a\cdot\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$

10.6 Die Spitze eines Turmes wird von Punkt A aus unter einem Winkel $\alpha = 30°$ gesehen, vom Punkt B aus unter einem Winkel $\beta = 60°$. Die Strecke $\overline{AB} = 80\ m$ lang. Wie hoch ist der Turm? Höhe $h = \overline{CD}$.

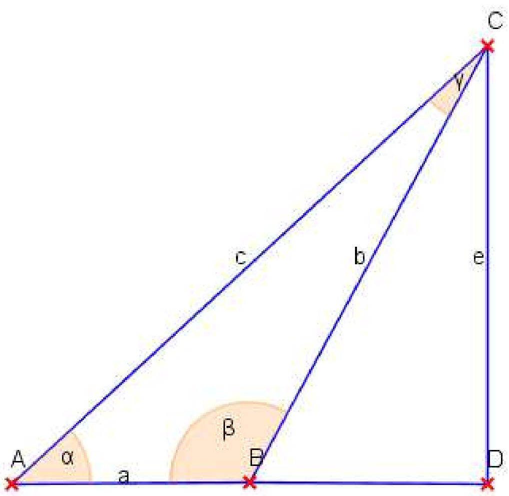


<u>Lösung</u>: $\measuredangle ACB = \gamma = 30°$, wenn $\alpha = 30°$

nach dem Sinussatz gilt: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$; $\dfrac{\sin 30°}{\sin 30°} = \dfrac{\overline{BC}}{80} \quad \Rightarrow \overline{BC} = 80$

$$h = \overline{CD} = 80 \cdot \sin 60° = 80 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 40\sqrt{3} \quad (\approx 69{,}2\ m)$$

10.7 Gegeben: $\overline{AC} = c = 20\ cm$; $\overline{BC} = b = 13\ cm$; $\overline{DC} = e = 12\ cm$;
gesucht: $\sin\alpha$; $\sin\beta$; $\sin\gamma$;



Lösung: nach dem Lehrsatz des Pythagoras angewendet auf das $\Delta\ BDC$ folgt: $\overline{BD} = 5\ cm$

und analog für das $\Delta\ ADC$ folgt: $\overline{AD} = 16\ cm$

$\Rightarrow \overline{AB} = a = 11\ cm$;

in $\Delta\ BDC$ sei $\measuredangle DBC = \beta^*$ $\Rightarrow \sin\beta^* = \frac{e}{b} = \frac{12}{13}$

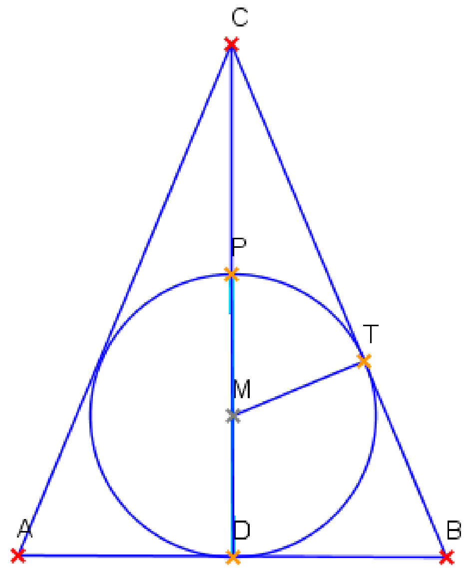
$\sin\beta = \sin(180° - \beta^*) = \sin\beta^* \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{12}{13}$

$\sin\alpha = \frac{e}{c} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

(Sinussatz): $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = 0{,}6 \cdot \frac{11}{13} = \frac{33}{65}$

10.8 Gegeben: $c = 2\ \overline{AD} = 2\ \overline{DB} = 6\ cm$; $r = \overline{MT} = 2\ cm$; $y = \overline{CP}$;

gesucht: $x = \overline{CT}$



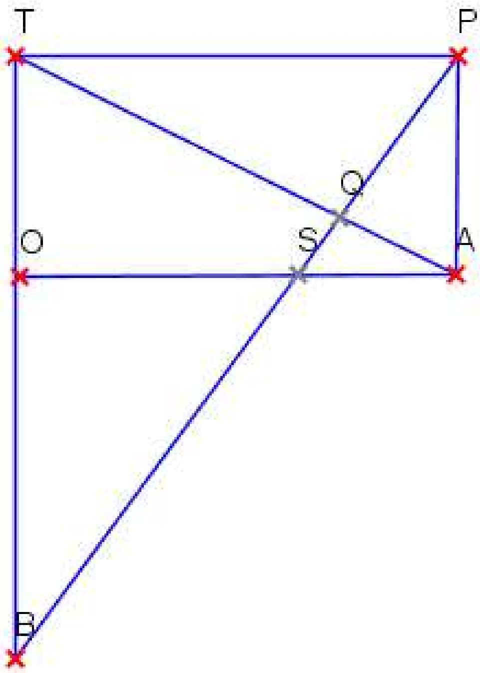
Lösung: die Dreiecke $\Delta\ ADC$ und $\Delta\ MTC$ sind ähnlich

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (I) & \frac{c}{2} : (y + 2r) = r : x \\ (II) & \frac{c}{2} : \left(x + \frac{c}{2} \right) = r : (y + r) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (I) & y + 2r = \frac{c}{2r} x \\ (II) & y = \frac{2r}{c} x \end{array} \right\}$$

$$(I) - (II) \Rightarrow r = x \cdot \left(\frac{c}{2r} - \frac{2r}{c} \right) - r \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2r \cdot 2rc}{c^2 - 4r^2} \quad \Rightarrow \quad x = 4{,}8\ cm \quad und \quad y = 3{,}2\ cm$$

10.9 Gegeben ist das Rechteck *OAPT* mit $a = \overline{SA}$; $b = \overline{BT} = 4a$ und $BP \perp AT$;

gesucht: $x = \overline{OA}$; $y = \overline{OT}$



Lösung: (I) die Dreiecke $\Delta\ APS$ und $\Delta\ APT$ sind ähnlich $\Rightarrow a : y = y : x \Rightarrow y^2 = ax$;

(II) die Dreiecke $\Delta\ APT$ und $\Delta\ PTB$ sind ähnlich $\Rightarrow y : x = x : b \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{b}$;

aus (I) und (II) folgt: $ax = \dfrac{x^4}{b^2} \quad \Rightarrow (\mathit{für}\ x \neq 0) \quad x = 2a\sqrt[3]{2}$ und $y = a \cdot \sqrt[3]{4}$

Studienkolleg bei den Universitäten des Freistaates Bayern

Aufnahmeprüfung

Mathematiktest

Prüfungsnummer: ....

Name: ....

Studienfach: ....

Hinweis: Die Bearbeitung und die Lösung sind auf diese Blätter zu schreiben.
Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Arbeitszeit: 60 Minuten

---

1. Für welche $x \in IR$ gilt:

   $(6x^3 - 7x^2 - x + 2) = 0$

// Lösung: durch Probieren findet man x = 1 als eine Lösung.
die Polynomdivision liefert: $(6x^3 - 7x^2 - x + 2):(x-1) = 6x^2 - x - 2$
Lösungsmenge $IL = \left\{1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right\}$ *//*

2. Vereinfachen Sie:

$$\left(\frac{\sqrt[12]{x^5}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}}\right) \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{x}} \quad =$$

// Lösung: ... = 2 //

3. Vereinfachen Sie:

$$\left(\frac{ay+1}{y^2-1} - \frac{a}{y-1} + \frac{a}{y^2+y}\right) : \frac{1}{y^2+y} =$$

// Lösung: ... = $\frac{y-a}{y-1}$ *//*

4. Für welche reellen Werte von k hat die folgende Gleichung genau zwei verschiedene reelle Lösungen?

   $x^2 - k\,x + k + 3 = 0$

// Lösung: die Diskriminante $D = k^2 - 4k - 12 > 0 \iff k>6$ *oder* $k< -2$ *//*

5. Für welche $x \in \mathrm{IR}$ gilt:

   $$\left|\frac{2\,x+1}{x-2}\right| < 1$$

// Lösung: die Definitionsmenge $\mathrm{ID} = \mathrm{IR}$ ohne $\{2\}$

1. Fall: $x > 2 \;\Rightarrow \mathrm{IL} = \{\ \}$

2.Fall: $-\frac{1}{2} \le x < 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{IL} = \left\{x \mid x \in \mathrm{IR} \wedge -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{3}\right\} = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right[$

3.Fall: $x < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{IL} = \left\{x \mid x \in \mathrm{IR} \wedge -3 < x < -\frac{1}{2}\right\} = \left]-3; -\frac{1}{2}\right[$

Gesamtlösungsmenge $\mathrm{IL} = \left\{x \mid x \in \mathrm{IR} \wedge -3 < x < \frac{1}{3}\right\} = \left]-3; \frac{1}{3}\right[$ *//*

6. Bestimmen Sie für die folgende Gleichung die maximale Definitionsmenge D sowie die Lösungsmenge L in der Grundmenge G = IR.:

   $\log_2(x+3) + \log_2(x-2) = 1 + \log_2 x$

// Lösung: die Definitionsmenge $\mathrm{ID} = \left]2; +\infty\right[$

$\log_2[(x+3)\cdot(x-2)] = \log_2(2x)$

$\iff \quad x^2 + x - 6 = 2x \quad \iff \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \iff \quad x = 3 \;\vee\; x = -2$

die Lösungsmenge $\mathrm{IL} = \{3\}$ *//*

7. Bestimmen Sie die Lösungsmenge L in der Grundmenge G = IR.

$$9^{x} \cdot 3^{3x-1} = 3^{-2} \cdot 27^{x}$$

// Lösung: $3^{2x} \cdot 3^{3x-1} = 3^{-2} \cdot 3^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{5x-1} = 3^{3x-2} \quad \Leftrightarrow \quad 5x-1 = 3x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$

die Lösungsmenge $\mathrm{IL} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ *//*

8. Für welche $x \in \mathrm{IR}$ und $0 \leq x \leq 2\pi$ gilt die folgende Gleichung:
   $1 + \cos 2x = \cos x$?

// Lösung:

$1 + 2\cos^2 x - 1 = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \cdot (2\cos x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}$

die Lösungsmenge $\mathrm{IL} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{3}\pi\right\}$ *//*

9. Jemand hat 30 Flaschen Getränke der Sorten A, B und C für 30 gleiche Münzen gekauft.
   x, y und z sind jeweils die Anzahl der Flaschen von Sorte A, B und C.
   Für 3 Flaschen der Sorte A zahlte er eine Münze, für zwei Flaschen der Sorte B ebenfalls eine Münze und für jede Flasche der Sorte C zwei Münzen.
   Wie viele Flaschen jeder Sorte hat er gekauft ?

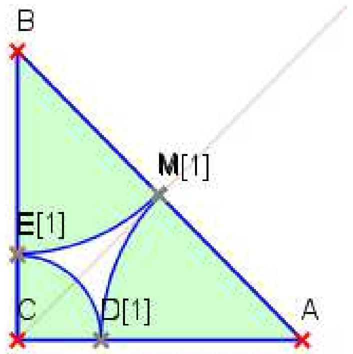
// Lösung: (1) $x + y + z = 30 \quad \Leftrightarrow \quad z = 30 - x - y$

(2) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30$ *{ (1) in (2) einsetzen liefert die Gleichung:*

$20 - \frac{10}{9}x = y$. *Da* $x, y, z \in \mathrm{IN}$ *sein müssen, folgt:* $x = 9; \quad y = 10; \quad z = 11;$

Antwort: 9 Flaschen von A, 10 Flaschen von B, 11 Flaschen von C. //

10. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Die Schenkel sind $\overline{AC} = \overline{CB}$ = r cm lang. M[1] ist der Mittelpunkt der Strecke [AB]. Die drei Kreisbögen haben die Mittelpunkte A, B und C und berühren sich auf den Dreiecksseiten in den Punkten D[1], E[1] und M[1]. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks D[1]E[1]M[1] in der Mitte des Dreiecks in Abhängigkeit von r, das von den Kreisbögen begrenzt wird. Siehe Skizze!



// Lösung:

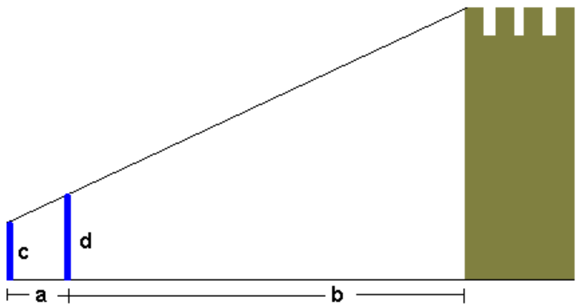
(a) $F_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{CB} = \frac{1}{2}r^2$

(b) $2\cdot F_{AM[1]D[1]} = 2\cdot\frac{1}{8}\overline{AM[1]} = \frac{1}{4}\left(\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2\pi = \frac{1}{8}r^2\pi$

(c) $F_{CD[1]E[1]} = \frac{1}{4}\left(r-\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2\pi = \frac{1}{4}r^2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

(d) $F_{D[1]M[1]E[1]} = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^2\pi + \frac{\sqrt{2}}{4}r^2\pi$ //

11. Es soll die Höhe des abgebildeten Turms ermittelt werden. Hierzu werden zwei Stäbe so aufgestellt, dass sie beide senkrecht stehen und dass man über ihre oberen Enden die Turmspitzen anpeilen kann. Die beiden Stäbe sind 1,80 m bzw. 2,30 m lang. Welche Turmhöhe ergibt sich, wenn folgende Messungen durchgeführt wurden:
a=2 m; b=106 m. Stellen Sie zuerst eine Formel für die Höhe h in Abhängigkeit von a, b, c und d auf und berechnen Sie dann ohne Taschenrechner die Höhe h.



// Lösung: Die Höhe des Turms sei h; α sei der Winkel zwischen der Waagrechten und der Geraden zur Turmspitze.

$$\tan\alpha = \frac{d-c}{a} = \frac{h-c}{a+b}$$

$$\tan\alpha = \frac{2{,}3-1{,}8}{2} = \frac{h-1{,}8}{106+2}$$

$$\Rightarrow \quad h = 28{,}8\,[m]$$

//