Technische Universität Berlin

Internationales Studienkolleg
International Affairs Preparatory Course

Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Eignung ausländischer Studienbewerber zum Hochschulstudium im Lande Berlin

für naturwissenschaftliche und technische Studiengänge (Feststellungsprüfung für T-Kurse)

Sommersemester 2021

Mathematik

Zu bearbeiten sind drei der vier gestellten Aufgaben.
Je Aufgabe können 20 Punkte erzielt werden. Für mangelnde sprachliche Richtigkeit und schlechte äußere Form können bis zu 10 % je Aufgabe abgezogen werden.

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung, Taschenrechner (nicht-grafisch, nicht programmierbar), einsprachiges, deutsches Wörterbuch

Name: ______________________________

Prüfungsgruppe: ______________________________

Eingereicht von: ______________________________

Geprüft von: ______________________________

Internationales
International Affairs

Aufgabe 1: Kurvendiskussion 20 Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus [-4;4] =]-\infty;-4[\cup]4;\infty[$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ln(x-4)}{x-4} & , \quad x > 4 \\ -\dfrac{ln(-x-4)}{-x-4} & , \quad x < -4 \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie die Symmetrie der Funktion. Verwenden Sie die Symmetrieeigenschaften für die weitere Funktionsuntersuchung. (2 Pkte)

b) Untersuchen Sie das Randverhalten der Funktion. (2 Pkte)

c) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$ für $x > 4$. (2 Pkte)

Hinweis: Sie sollten für die zweite Ableitung folgende Lösung erhalten:

$$f''(x) = \frac{2\,ln(x-4) - 3}{(x-4)^3}$$

d) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen sowie die Lage und die Art aller Extrem- und Wendepunkte. Nutzen Sie für den Nachweis der Wendepunkte das VZW-Kriterium. (8 Pkte)

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = e^{\frac{3}{2}} + 4$. (2 Pkte)

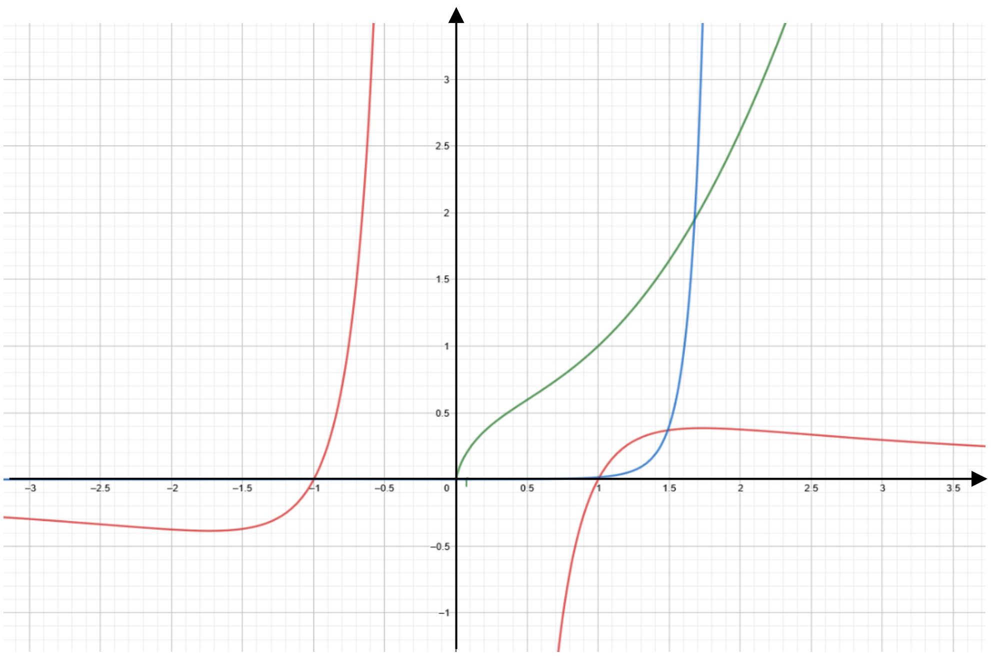
f) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen und tragen Sie alle Ergebnisse der Rechnung ein.
Skalierung: x-Achse 1 LE = 0,5 cm, y-Achse 1 LE = 5 cm (4 Pkte)

Aufgabe 2: Integralrechnung **20 Punkte**

Gegeben sind die drei Funktionen

$$f(x) = x^2 - x \cdot ln(x) \qquad g(x) = \frac{x^2}{3} \cdot e^{x^3-4} \qquad h(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$$

deren Funktionsgraphen untenstehend skizziert worden sind.



a) Berechnen Sie durch Integration folgende Stammfunktionen: (6 Pkte.)

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \cdot ln(x) \qquad G(x) = \frac{e^{x^3-4}}{9} \qquad H(x) = \frac{1}{2x^2} + ln|x|$$

b) Die Funktionen g und h schließen im 1. Quadranten eine Fläche ein. Sie dürfen <u>ohne Rechnung</u> verwenden, dass die Schnittpunkte ungefähr bei $A(1|0)$ und $B(1{,}5|0{,}36)$ liegen. Berechnen Sie die eingeschlossene Fläche. (3 Pkte.)

c) Berechnen Sie die Fläche, die f im Bereich $]0; 1]$ mit der x-Achse einschließt. (4 Pkte.)

d) Berechnen Sie die Fläche, die h im Bereich $[1; \infty[$ mit der x-Achse einschließt. (2 Pkte.)

e) Bestimmen Sie $b \in [1; \infty[$ so, dass die Funktion g mit der x-Achse im Bereich $[1; b]$ eine Fläche von $\frac{8}{9e^3}$ einschließt. (3 Pkte.)

f) Folgende Regel gilt **nicht**. Begründen Sie kurz <u>und</u> geben Sie ein Gegenbeispiel. (2 Pkte.)

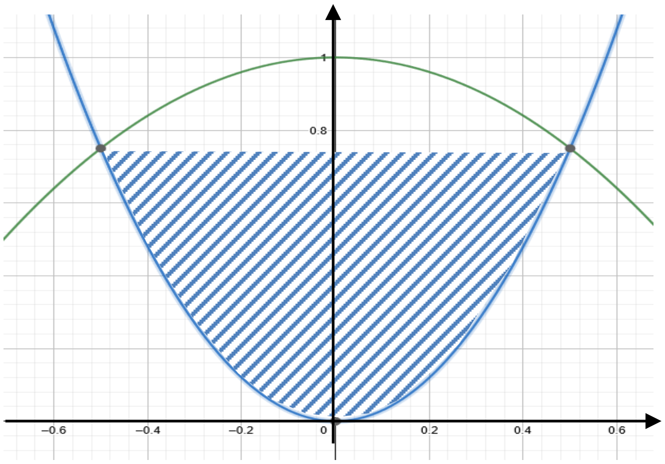
$$\int f^2(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)^2$$

Aufgabe 3: Extremwertproblem 20 Punkte

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{sowie} \quad g_a(x) = ax^2$$

mit $a \geq 0$, die in folgender Skizze auszugsweise dargestellt sind:



a) Leiten Sie eine Zielfunktion für die von beiden Funktionen eingeschlossene Fläche A her, so wie sie in der Skizze schraffiert dargestellt ist. Die Größe der Fläche A hängt von der Lage der Schnittpunkte ab, die wiederum vom Parameter a abhängt:

$$A(a) = \frac{4}{3} a \cdot (a+1)^{-\frac{3}{2}}$$

Begründen Sie Ihren Ansatz und Ihre Rechenschritte kurz. (8 Pkte.)

Hinweis: Sie müssen Integralrechnung zum Herleiten der Zielfunktion nutzen.

b) Berechnen Sie, für welches $a \geq 0$ die Fläche A maximal ist.
Berechnen Sie diese maximale Fläche. (7 Pkte.)
Hinweis: Es ist sinnvoll, zum Nachweis der Art der Extrema das VZW-Kriterium zu nutzen.

c) Untersuchen Sie, ob es sich um ein lokales oder ein globales Maximum handelt. (4 Pkte.)

d) Fertigen Sie eine ungefähre Skizze der Zielfunktion, die ihre Ergebnisse enthält. (1 Pkt.)

Aufgabe 4: Elementarmathematik 20 Punkte

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung (mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$). (5 Pkte.)

$$|3 - 2x| \cdot |4 + x| \leq 11$$

b) Bestimmen Sie Definitionsbereich und Lösungsmenge folgender Ungleichung. (5 Pkte.)

$$\frac{\sqrt{5 + 4x}}{6 - x} < -6$$

c) Bestimmen Sie Definitionsbereich und Lösungsmenge folgender Gleichung. (5 Pkte.)

$$-\,log_x(7) + log_7(x) = \frac{log_{10}(7)}{log_{10}(x)}$$

d) Gegeben sind die drei Punkte $A(1|2\mid 3), B(-2|\,0\mid 1)$ sowie $C(1|\,0\mid -1)$. (5 Pkte.)

1. Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichseitig oder gleichschenklig ist. (2)
2. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABC. (1)
3. Geben Sie einen zusätzlichen Punkt D an, so dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet. (1)
4. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks ABC. (1)

Aufgabe 1

a)
$$f(-x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(-x-4)}{-x-4} & ; -x > 4 \\[2ex] -\dfrac{\ln(-(-x)-4)}{-(-x)-4} & ; -x < -4 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\ln(-x-4)}{-x-4} & ; x < -4 \\[2ex] -\dfrac{\ln(x-4)}{x-4} & ; x > 4 \end{cases} \neq f(x) \quad (1)$$

$$-f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(x-4)}{x-4} & ; x > 4 \\[2ex] \dfrac{\ln(-x-4)}{-x-4} & ; x < -4 \end{cases} = f(-x) \quad (1/2)$$

$\Rightarrow$ f ist punktsymmetrisch (1/2)

b)
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x-4)}{x-4} \overset{\text{L'H}}{\underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x-4}}{1} = 0^+ \quad (1/2)$$

$\Rightarrow$ f pktsymm. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$ (1/2)

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{\ln(x-4)}{x-4} \overset{\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)}{=} -\infty \quad (1/2)$$

$\Rightarrow$ f pktsymm. $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = +\infty$ (1/2)

c) $x > 4$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x-4}\cdot(x-4) - \ln(x-4)}{(x-4)^2} = \frac{1-\ln(x-4)}{(x-4)^2}$$ (1)

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{\cancel{(x-4)}}\cdot(x-4)^{\cancel{2}} - (1-\ln(x-4))\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x-4)}\,(-1-2+2\ln(x-4))}{(x-4)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2\ln(x-4)-3}{(x-4)^3}$$ (1)

d) NST: $f(x) = 0$
$x > 4$

$\Leftrightarrow \ln(x-4) = 0 \Leftrightarrow x-4 = 1 \Leftrightarrow x_{N_1} = 5$ (1/2)

$\Rightarrow$ f punktsymm.: $x_{N_2} = -5$ (1/2)

Extrema

notw. Bed.: $f'(x_E) = 0$
$x > 4$

$\Leftrightarrow 1 - \ln(x-4) = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln(x-4) \Leftrightarrow e = x-4$

$\Leftrightarrow x_{E_1} = e+4 \approx 6{,}72$ (1)

($\Rightarrow$ f punktsymm.: $x_{E_2} = -e-4$)

zusätzliche Bed.: $f''(x_E) \neq 0$

$$f''(e+4) = \frac{2\ln(e+4-4)-3}{(e+4-4)^2} = \frac{-1}{e^2} < 0 \Rightarrow H(e+4 \mid f(e+4))$$ (1/2) (1/2)

$= H\left(e+4 \mid \frac{1}{e}\right)$ 0,37 (1/2)

$\Rightarrow$ da f punktsymm.: $T\left(-e-4 \mid -\frac{1}{e}\right)$ (1/2)

Wendepunkte

notw. Bed.: $f''(x_W)=0$

$x>4$

$\Leftrightarrow 2\ln(x-4)-3=0 \Leftrightarrow \ln(x-4)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x-4=e^{3/2} \Leftrightarrow x_{W_1}=e^{\frac{3}{2}}+4$ (1)

$\left(\Rightarrow \text{da } f \text{ pktsymm.: } x_{W_2}=-e^{\frac{3}{2}}-4\right)$

zusätzl. Bed.: VZW von f'' bei x_{W_1}

$f''(e^{\frac{3}{2}}+3)=\frac{2\ln(e^{3/2}-1)-3}{(e^{3/2}-1)^2}\approx -0{,}01$ (1)

$f''(e^{\frac{3}{2}}+5)=\frac{2\ln(e^{3/2}+1)-3}{(e^{3/2}+1)^3}\approx 0{,}002$

VZW $\ominus \to \oplus$ (1/2)

$W_{RL}(e^{3/2}+4 \mid f(e^{3/2}+4))$

$=\underline{\underline{W_{RL}\left(e^{3/2}+4 \mid \frac{3}{2e^{3/2}}\right)}}$ (1)

$\Rightarrow$ da f pktsymm.: $\underline{\underline{W_{RL}\left(-e^{3/2}-4 \mid -\frac{3}{2e^{3/2}}\right)}}$ (1/2)

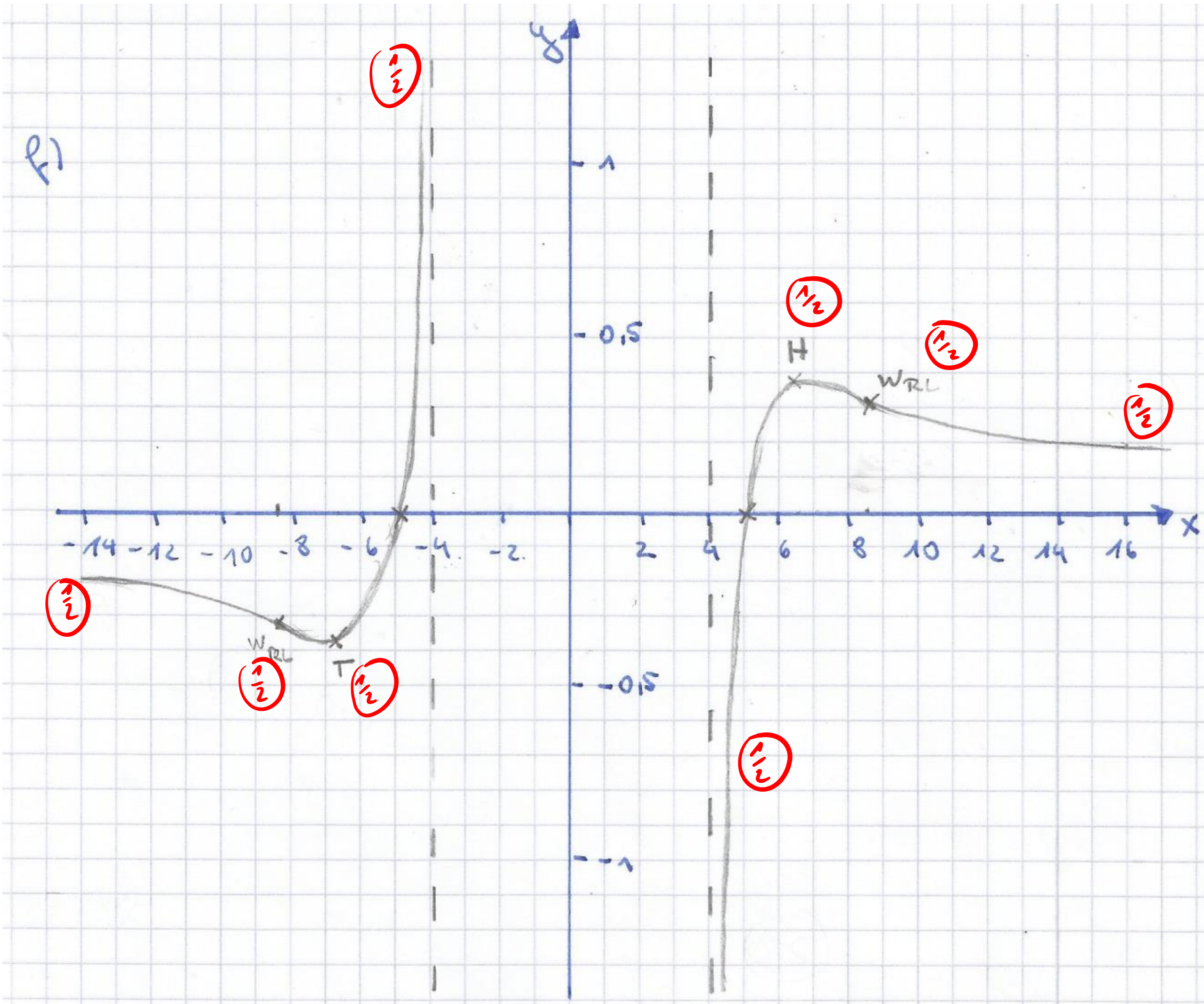
e) $t(x)=mx+n$

$x=e^{3/2}+4 \approx 8{,}48$, $y=\frac{3}{2e^{3/2}}\approx 0{,}33$ (1/2)

$m=f'(e^{3/2}+4)=\frac{1-\ln(e^{3/2})}{(e^{3/2})^2}=-\frac{1}{2e^3}\approx -0{,}02$ (1/2)

$\frac{3}{2e^{3/2}}=-\frac{1}{2e^3}\cdot(e^{3/2}+4)+n \Rightarrow n=\frac{3}{2e^{3/2}}+\frac{(e^{3/2}+4)}{2e^3}\approx 3{,}56$ (1/2)

$\underline{\underline{t(x)=-0{,}02x+3{,}56}}$ (1/2)


f)
y
x
1
0,5
-0,5
-1
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
12
14
16
H
T
W_{RL}
W_{RL}
1/2
1/2
1/2
1/2
1/2
1/2
1/2
1/2

Aufgabe 2

a)

$$\int f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right] - \int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v}\,dx \quad (1)$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right] - \left(\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right] - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right] - \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right] + \frac{1}{2}\int x\,dx \quad (1)$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{4}\right]$$

$$\int g(x)\,dx = \int \frac{x^2}{3}\cdot e^t \cdot \frac{dt}{3x^2} = \frac{1}{9}\int e^t\,dt$$

$$t = x^3 - 4$$

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2 \quad (1)$$

$$= \left[\frac{1}{9}e^{x^3-4}\right] \quad (1)$$

$$\int h(x)\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\,dx = [\ln(x)] - \int x^{-3}\,dx \quad (1)$$

$$= \left[\ln(x) + \frac{1}{2}x^{-2}\right] = \left[\frac{1}{2x^2} + \ln(x)\right] \quad (1)$$

b)

$$\left|\int_1^{1,5} g(x)-h(x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{e^{x^3-4}}{9} - \frac{1}{2x^2} - \ln(x)\right]_1^{1,5}\right| \quad (1)$$

$$= \left|\frac{e^{-0,625}}{9} - \frac{1}{4,5} - \ln(1,5) - \frac{e^{-3}}{9} + \frac{1}{2} + 0\right| \quad (1)$$

$$\approx \left|0,059 - 0,222 - 0,405 - 0,006 + 0,5\right|$$

$$= \underline{\underline{0,074}} \quad (1)$$

c)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_0^1$$

$$= \lim_{k\to 0}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2}\ln(k)\right) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lim_{k\to 0} k^2\ln(k)$$

$$= \frac{7}{12} + \frac{1}{2}\lim_{k\to 0}\frac{\ln(k)}{\frac{1}{k^2}} \quad (1)$$

$$\overset{L'H}{\underset{(1)}{=}} \frac{7}{12} + \frac{1}{2}\lim_{k\to 0}\frac{\frac{1}{k}}{\frac{-2}{k^3}} = \underline{\underline{\frac{7}{12}}} \quad (1)$$

d)

$$\int_1^{\infty} h(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{2x^2} + \ln(x)\right]_1^k \qquad 1$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{2k^2}}_{\to 0} + \underbrace{\ln(k)}_{\to\infty} - \frac{1}{2} - 0\right)$$

$$= \underline{\underline{\infty}} \qquad 1$$

e)

$$\int_1^{b} g(x)\,dx = \left[\frac{e^{x^3-4}}{9}\right]_1^b$$

$$= \frac{1}{9}\left(e^{b^3-4} - e^{-3}\right)$$

$$= \frac{1}{9}e^{b^3-4} - \frac{1}{9e^3} \overset{!}{=} \frac{8}{9e^3} \qquad 1$$

$$\frac{1}{9}e^{b^3-4} = \frac{1}{e^3}$$

$$e^{b^3-4} = \frac{9}{e^3} \qquad |\ln(\ldots) \qquad 1$$

$$b^3 = \ln\left(\frac{9}{e^3}\right) + 4$$

$$b = \sqrt[3]{\ln(9)+1} \approx \underline{\underline{1{,}473}} \qquad 1$$

f)

Gegenbsp.:

$$\int x^2\,dx = \left(\int x\,dx\right)^2$$

$$\frac{x^3}{3} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \quad \lightning$$

1

Begründung: Integral als eine Summe darf so nicht umgeformt werden, das wäre wie $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ $\lightning$

1

Aufgabe 3

a) (1) Schnittpunkte bestimmen,

(2) dann $\int_{x_{s_1}}^{x_{s_2}} g_a(x)\,dx$ für die Fläche unter der schraffierten Fläche → das dann vom

(3) Rechteck $(x_{s_2} - x_{s_1}) \cdot f(x_{s_i})$ subtrahieren

2

zu (1)

$$f(x) = g_a(x)$$

$$1 - x^2 = a x^2$$

$$1 = x^2 (a+1)$$

$$x^2 = \frac{1}{a+1} \Rightarrow x_{s_1} = -\sqrt{\frac{1}{a+1}}$$

$$x_{s_2} = \sqrt{\frac{1}{a+1}}$$

2

zu (2)

$$2 \cdot \int_0^{x_{s_2}} g_a(x)\,dx = 2 \cdot \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_0^{\sqrt{\frac{1}{a+1}}} = 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{a+1}} \cdot \frac{1}{a+1}$$ 1

↑ Symmetrie

$$= \frac{2a}{3(a+1)} \sqrt{\frac{1}{a+1}}$$ 1

zu (3)

$$A(a) = \underbrace{2\sqrt{\frac{1}{a+1}}}_{x_{s_2}-x_{s_1}} \cdot \underbrace{a \cdot \frac{1}{a+1}}_{g_a(x_{s_2})} - \frac{2a}{3(a+1)}\sqrt{\frac{1}{a+1}} \qquad 1$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a+1}}\left(\frac{2a}{a+1} - \frac{\frac{2}{3}a}{a+1}\right) \qquad 1$$

$$= \frac{\frac{4}{3}a}{a+1}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}a\,(a+1)^{-\frac{3}{2}}$$

b)

$$A'(a) = \frac{4}{3}\cdot(a+1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}a\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(a+1)^{-\frac{5}{2}} \qquad 1$$

$$= \frac{4}{3}(a+1)^{-\frac{3}{2}} - 2a\,(a+1)^{-1}(a+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= (a+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{4}{3} - \frac{2a}{a+1}\right) \qquad 1$$

<u>notw. Bed. für lokale Extrema:</u>

$$A'(a) = 0$$

$$(a+1)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{3} - \frac{2a}{a+1}\right) = 0 \qquad \Big| \cdot (a+1)^{\frac{3}{2}}$$

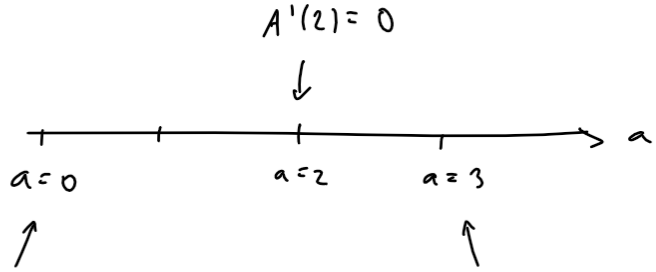
$$\frac{4}{3} = \frac{2a}{a+1} \qquad 1$$

$$\frac{4}{3}a + \frac{4}{3} = 2a$$

$$\frac{4}{3} = \frac{2}{3}a$$

$$\underline{\underline{2 = a}} \qquad 1$$

hinr. Bed. (VZW):



$A'(0) = 1 \cdot \frac{4}{3} > 0$ 1

$A'(3) = \underbrace{4^{-\frac{3}{2}}}_{>0} \cdot \Big(\underbrace{\frac{4}{3} - \frac{6}{4}}_{<0}\Big) < 0$ 1

Also VZW von $\oplus$ zu $\ominus$ $\Rightarrow H(2 \mid 0{,}51)$

$A(2) = \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot (2+1)^{-\frac{3}{2}}$ 1

$= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{27}} \approx \underline{\underline{0{,}5132}}$

c) Randverhalten

$A(0) = \frac{4}{3} \cdot 0 \cdot 1^{-\frac{3}{2}} = \underline{0} < 0{,}5132$ 1

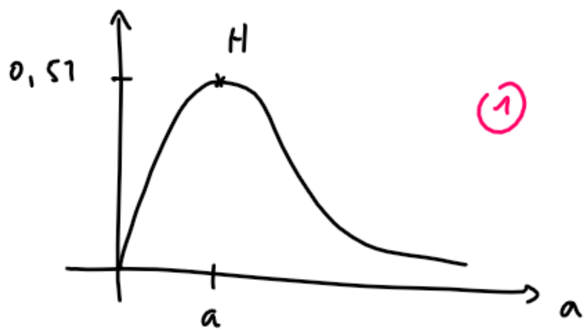
$\lim\limits_{a \to \infty} A(a) = \lim\limits_{a \to \infty} \frac{4}{3} a (a+1)^{-\frac{3}{2}}$ 1

$= \frac{4}{3} \cdot \lim\limits_{a \to \infty} \frac{a}{(a+1)^{\frac{3}{2}}}$

1 $\overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \frac{4}{3} \cdot \lim\limits_{a \to \infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{3}{2} \cdot (a+1)^{\frac{1}{2}}}_{\to 0}} = \underline{\underline{0}} < 0{,}5132$

$\Rightarrow$ Das lokale Maximum ist auch das globale Maximum. 1

d)



Aufgabe 4

a) Punkte: 1,5 je Fall zzgl. 0,5 für die Lösungsmenge am Ende.

$|3-2x| \cdot |4+x| \leq 11$ $\quad \boxed{\mathbb{D} = \mathbb{R}}$

$\boxed{\text{Fall 1}}$ $|+\text{vo}| \cdot |+\text{vo}|$

$3-2x \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \geq x$, $4+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$

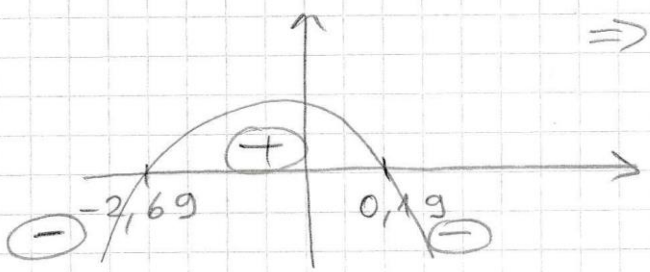
$\Rightarrow$ Bedingung: $\boxed{B: \ \frac{3}{2} \geq x \geq -4}$ $\quad$ 1/2

$(3-2x)\cdot(4+x) \leq 11 \quad |-11$

$1 - 5x - 2x^2 \leq 0$, $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-4\cdot(-2)\cdot 1}}{-4}$

$x_1 \approx 0{,}19$, $x_2 = -2{,}69$ $\quad$ 1/2

Skizze-1



$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = [-4; -2{,}69] \cup [0{,}19; \frac{3}{2}]$ $\quad$ 1/2

$\boxed{\text{Fall 2}}$ $|-| \cdot |+|$

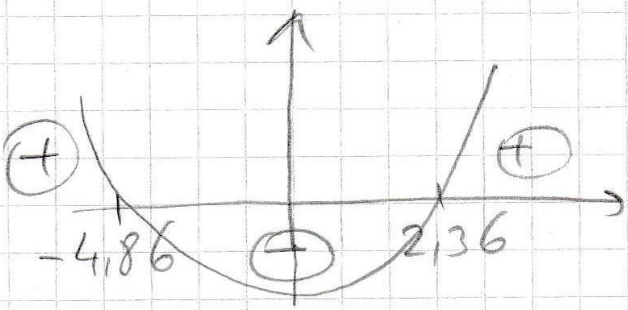
Bedingung: $\boxed{B: \ x > \frac{3}{2}}$ $\quad$ 1/2

$(-3+2x)\cdot(4+x) \leq 11$

$2x^2 + 5x - 23 \leq 0$, $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-4\cdot 2\cdot(-23)}}{4}$ $\quad$ 1/2

$x_1 \approx 2{,}36 \quad x_2 \approx -4{,}86$

Skizze-2



$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \left] \frac{3}{2} ; 2{,}36 \right]$ $\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Fall 3}}$ $|+|\cdot|-|$ $\frac{1}{2}$

Bedingung: $\boxed{B: x < -4}$

$(3-2x)\cdot(-4-x) \leq 11$

$2x^2 + 5x - 23 \leq 0$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ Laut der Skizze-2: $\mathbb{L}_3 = [-4{,}86 ; -4[$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3$

$\mathbb{L} = [-4{,}86 ; -2{,}69] \cup [0{,}19 ; 2{,}36]$ $\frac{1}{2}$

b)

$$\frac{\sqrt{5+4x}}{6-x} < -6$$

$5+4x \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{4}$
$6-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 6$

1 $\Rightarrow \boxed{\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq -\frac{5}{4} \wedge x \neq 6 \right\}}$

$\boxed{\text{Fall 1}}$ $6 - x > 0$

$6 > x \implies$ Bedingung: $\boxed{B: -\frac{5}{4} \leq x < 6}$ $\frac{1}{2}$

$$\underbrace{\sqrt{5+4x}}_{0 \vee \oplus} < \underbrace{-36+6x}_{\ominus} \implies \mathbb{L}_1 = \{\ \}$$ $\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Fall 2}}$ $6 - x < 0$

$6 < x \implies \boxed{B: x > 6}$ $\frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{5+4x}}{6-x} < -6 \quad \Big| \cdot \underbrace{(6-x)}_{\ominus}$$

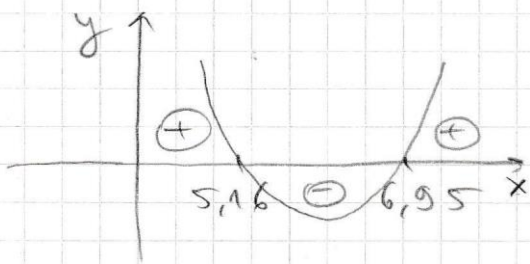
$$\underbrace{\sqrt{5+4x}}_{\oplus} > \underbrace{-36+6x}_{\oplus} \quad \Big| \ (\ldots)^2$$

$$5 + 4x > 36x^2 - 432x + 1296$$

$$0 > 36x^2 - 436x + 1291$$ 1

$$x_{1;2} = \frac{436 \pm \sqrt{436^2 - 4 \cdot 36 \cdot 1291}}{2 \cdot 36} \implies x_1 \approx 6{,}95 \quad \tfrac{1}{2} \quad , x_2 \approx 5{,}16$$

Skizze



$\implies \mathbb{L}_2 = \,]6; 6{,}95[$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$

$\mathbb{L} = \,]6; 6{,}95[$ 1

c)

$$-\log_x 7 + \log_7 x = \frac{\lg 7}{\lg x} \qquad \boxed{\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad 1$$

$\frac{1}{2}$

$$-\log_x 7 + \log_7 x = \log_x 7 \qquad \left(\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\right)$$

$$\log_7 x = 2 \cdot \log_x 7$$

$\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\log_x 7} = 2 \cdot \log_x 7 \qquad \left(\log_a b = \frac{1}{\log_b a}\right)$$

$\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = (\log_x 7)^2 \quad \Big| \pm\sqrt{}$$

$$\Rightarrow \log_{x_1} 7 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Big| x_1^{(\dots)} \qquad \log_{x_2} 7 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(x_2^{(\dots)}\right)$$

1

$$7 = x_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \Big| \sqrt[\frac{1}{\sqrt{2}}]{} \qquad 7 = x_2^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \Big| \sqrt[-\frac{1}{\sqrt{2}}]{}$$

1

$$15{,}67 = x_1 \qquad 0{,}06 = x_2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{0{,}06;\, 15{,}67\}}} \quad \frac{1}{2}$$

d)

1. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 0-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{17}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-2 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{20}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 0-0 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{13}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ ΔABC weder gleichschenklig noch gleichseitig $\left(\frac{1}{2}\right)$

2.

$$\frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{1}{2}\left| \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right|$$

Ansatz $\left(\frac{1}{2}\right)$

auch anders lösbar

$$= \frac{1}{2}\left| \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-4) - (-2)\cdot(-2) \\ (-2)\cdot 0 - (-3)\cdot(-4) \\ (-3)(-2) - (-2)\cdot 0 \end{pmatrix} \right|$$

Lösung

$$= \frac{1}{2}\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{224} \approx \underline{\underline{7{,}5}}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)$

3.

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AC} + \vec{AB}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$D(-2 / -2 / -3)$$

4.

$$\vec{OS} = \vec{OA} + \frac{2}{3} \cdot \vec{AM_{BC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - 1 \\ 0 - 2 \\ 0 - 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OM_{BC}} = \vec{OB} + \frac{1}{2} \vec{BC} \quad \frac{1}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S\left(0 / \frac{2}{3} / \frac{7}{3}\right)$$