Kapitel 6

Feststellungsprüfungen

6.1 Prüfung Nr.1

1. Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ der folgenden Gleichung in der arithmetischen Form (Normalform) und in der Exponentialform.
   Stellen Sie die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene dar.

$$z^2 - z = \frac{(1-i)^6}{2z} - 4i$$

2. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-2c \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-2c \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2+d \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c, d \in \mathbb{R}$$

   2.1 Welchen Rang hat die Matrix A in Abhängigkeit von c und für welches c ist sie invertierbar?

   2.2 Untersuchen Sie die Lösbarkeit des Gleichungssystems in Abhängigkeit von c und d.
   Geben Sie die Lösungen für den Fall $d = 0$ an.

3. Gegeben ist die Funktionenschar $y = f_c(x) = \ln\left(c^2 - x^2\right)$ mit $x, c \in \mathbb{R}$ und $c > 0$.

   3.1 Untersuchen Sie f_c auf Definitionsbereich, Symmetrie und Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

   3.2 Für welche c gibt es Nullstellen? Geben Sie ein c für den den Fall an, dass es eine mehrfache Nullstelle gibt. Was können Sie in diesem Fall über ein Extremum sagen?

   3.3. Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes für die Funktion f_c.
   Untersuchen Sie, ob es Wendepunkte gibt.

   3.4. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f_3\,(c = 3)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.

   3.5. Der Graph der Funktion $f_3\,(c = 3)$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Bestimmen Sie die Maßzahl dieser Fläche.

4. Gegeben ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M(-3/-3/-3)$ und dem auf der Kugeloberfläche liegenden Punkt $K(-5/1/-7)$.

4.1. Berechnen Sie den Radius der Kugel.

4.2. Untersuche sie, ob die Ebene $E_1 \ : \ -x + 2y - 2z + 15 \ = \ 0$ die Kugel berührt.

4.3. Eine Ebene E_2 wird beschrieben durch den Punkt M, den Punkt K und den Koordinatenursprung. Berechnen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2.

4.4. In welchen Punkten schneidet die auf der Ebene E_2 im Punkt M senkrecht stehende Gerade die Kugel?

5. Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $y \ = \ t \ \cos{(t/2)}$ mit $x, t \ \in \ \mathbb{R}$ und $-\pi \ \le \ x \ \le \ \pi, \ t \ > \ 0$. Die in den Schnittpunkten von f mit der x-Achse senkrecht auf den Tangenten an den Graphen stehenden Geraden (Normalen) begrenzen mit dem Graphen der Funktion ein endliches Flächenstück $A(t)$.

5.1. Fertigen Sie eine Skizze an.

5.2. Für welches t wird diese Fläche minimal? Berechnen Sie den Flächeninhalt und führen Sie den Nachweis.

6.2 Prüfung Nr.2

1. Berechnen Sie alle Lösungen $z \ \in \ \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung in der arithmetischen Form.

$$\big(z - i\big)^3 \ = \ \frac{1 - \sqrt{3} \ i}{i + \sqrt{3}}$$

Stellen Sie die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene dar.

2. Gegeben ist das folgende lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lclclcl} (a+2)x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & a\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & (a+4)x_2 & + & a\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

2.1 Für welche reellen Zahlen a ist das Gleichungssystem

a) eindeutig lösbar, b) nicht eindeutig lösbar, c) nicht lösbar ?

2.2 Ermitteln Sie im Fall 2.1.b) die Lösungsmenge.

2.3 Bestimmen Sie für $a \ = \ 0$ die zur Koeffizientenmatrix gehörende inverse Matrix A^{-1}.

3. Gegeben ist die Funktionenschar $y \ = \ f_c(x) \ = \ \big(2x - x\,c + c - 2x^2\big)e^x$ mit $x, c \ \in \ \mathbb{R}$.

3.1 Untersuchen Sie f_c auf Definitionsbereich, Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen und das Verhalten im Unendlichen.

3.2 Geben Sie ein c für den den Fall an, dass es eine mehrfache Nullstelle gibt. Was können Sie in diesem Fall über ein Extremum sagen?

3.3. Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes für die Funktion $f_1(c \ = \ 1)$.

3.4. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f_1 \ (c \ = \ 1)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.

3.5. Der Graph der Funktion $f_1 \ (c \ = \ 1)$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Bestimmen Sie die Maßzahl dieser Fläche.

4. Gegeben ist die Funktion $y = g(x) = \sqrt{4x + 9}$.
   Der Punkt $P(u; f(u))$ ist ein Punkt des Funktionsgraphen der Funktion g.
   Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, dessen Abstand d vom Koordinatenursprung minimal ist.
   Der Nachweis des Minimums ist zu führen.

5. Gegeben sind die Punkte $A(3/3/2)$, $B(3/2/2)$ und $C(-1/3/1)$ sowie die Gerade

$$g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

   5.1. Stellen Sie die Gleichung für die Gerade h durch die Punkte A und B auf. Beschreiben Sie die Lage dieser Geraden im Koordinatensystem.

   5.2. Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h.

   5.3 Die Geraden g und h liegen in der Ebene E. Geben Sie für die Ebene E eine Gleichung in Parameterform und eine Gleichung in Koordinatenform an.

   5.4. Die Punkte $S_k(5/5/k)$ sowie A, B und C beschreiben Pyramiden $(k \in \mathbb{R})$.
   Geben Sie eine Gleichung für das Volumen dieser Pyramiden in Abhängigkeit von k an.
   Bestimmen Sie k für den Fall, dass die Punkte A, B, C und S_k keine Pyramide bilden.

   5.5. Stellen Sie eine Gleichung für die Ebene F durch die Punkte A, B und $S_5(k = 5)$ auf. Ermitteln Sie die Schnittgerade der Ebenen E und F.